IV. Tensoren

IV.1 Drehungen und Matrizen

betrachte 2 Koordinatensysteme:

alt: $\{\vec{e}_i \, , \; i=1,2,3\}$ | $\vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y + \vec{e}_3 z \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: \underline{r}$

neu: $\{\vec{f}_i \equiv \vec{e}_i{}' \, , \; i=1,2,3\}$ | $\vec{r} = \vec{f}_1 x' + \vec{f}_2 y' + \vec{f}_3 z' \doteq \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =: \underline{r}'$

$\vec{r} = \dots \;\|\; \vec{r} = \dots$, $\quad \underline{r} \neq \underline{r}'$

seien vollständige Orthonormalsysteme (VONS)

berechne Komponenten $\underline{a}'^T = (a_1', a_2', a_3')$ aus $\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$

im Falle einer Drehung $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{D} \{\vec{f}_j\}$ für einen Vektor $\vec{a}$

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_2 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_3 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \dots \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \dots \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = D \cdot \underline{a} \quad \text{mit} \quad D = (D_{jk}) = (\vec{f}_j \cdot \vec{e}_k)$$

Drehmatrix (4.1)

- definiert Anwendung einer Matrix auf eine Spalte

  Skalarprodukte „Zeile mal Spalte"

- ist linear: $D(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda (D \underline{a}) + \mu (D \underline{b})$

  $(\lambda D + \mu D')\, \underline{a} = \lambda (D \underline{a}) + \mu (D' \underline{a})$

mit $(D+D')_{jk} = D_{jk} + D'_{jk}$ & $(\lambda D)_{ij} = \lambda D_{ij}$

- in D stehen beiden Basissysteme

$$D = \begin{pmatrix} — \underline{f}_1 — \\ — \underline{f}_2 — \\ — \underline{f}_3 — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k \qquad (4.1')$$

in alter Basis — in neuer Basis

kürzer in Index-Schreibweise:

$$a'_j = D_{jk} a_k \qquad \text{mit} \qquad D_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k = \cos \varphi_{jk} \qquad (4.1'')$$

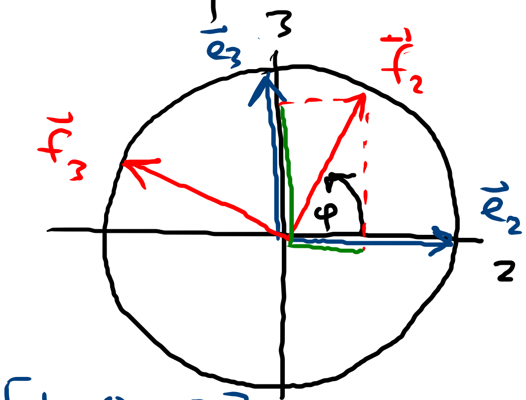
Winkel $\sphericalangle(\vec{f}_j, \vec{e}_k)$

Matrixelemente

einfachste Fall: Drehung um x-Achse, Winkel φ

$\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 \cos\varphi + \vec{e}_3 \sin\varphi$

$\vec{f}_3 = -\vec{e}_2 \sin\varphi + \vec{e}_3 \cos\varphi$



$$\left.\begin{array}{lll} \vec{f}_1\cdot\vec{e}_1 = 1 & \vec{f}_1\cdot\vec{e}_2 = 0 & \vec{f}_1\cdot\vec{e}_3 = 0 \\ \vec{f}_2\cdot\vec{e}_1 = 0 & \vec{f}_2\cdot\vec{e}_2 = \cos\varphi & \vec{f}_2\cdot\vec{e}_3 = \sin\varphi \\ \vec{f}_3\cdot\vec{e}_1 = 0 & \vec{f}_3\cdot\vec{e}_2 = -\sin\varphi & \vec{f}_3\cdot\vec{e}_3 = \cos\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow D_{x,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad \text{mit } \begin{cases} c = \cos\varphi \\ s = \sin\varphi \end{cases}$$

zyklisch vertauschen $1 \to 2 \to 3 \to 1$

$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}, \quad D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

allgemeiner Fall: Drehung um Achse $\vec{n}$ $(\vec{n}^2 = 1)$, Winkel φ

läßt sich zusammensetzen aus D_{x,φ_1}, D_{y,φ_2}, D_{z,φ_3}

Zusammensetzen von Drehungen:

$$\{\vec{e}_j\} \xrightarrow{D^{(1)}} \{\vec{f}_k\} \xrightarrow{D^{(2)}} \{\vec{g}_\ell\}$$

$$\vec{a}: \quad \underline{a} \qquad\qquad \underline{a}' \qquad\qquad \underline{a}''$$

$$\underline{a} \xrightarrow{\quad D \quad} \underline{a}''$$

$$\underline{a}'' = D^{(2)}\,\underline{a}' \quad \text{und} \quad \underline{a}' = D^{(1)}\,\underline{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}'' = D^{(2)}\left(D^{(1)}\underline{a}\right) \overset{!}{=} D\,\underline{a}$$

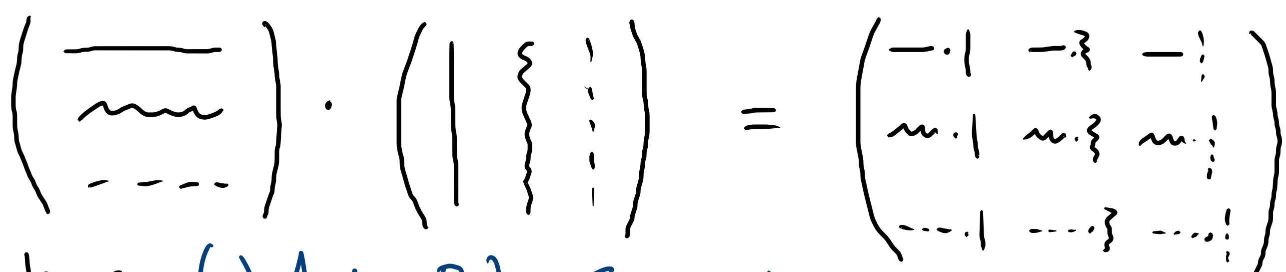
$$\overset{!!}{} \left(D^{(2)}D^{(1)}\right)\underline{a}$$

in Elementen:

$$a''_\ell = D^{(2)}_{\ell k}\, a'_k = D^{(2)}_{\ell k}\, D^{(1)}_{kj}\, a_j =: D_{\ell j}\, a_j \quad , \quad \text{also:}$$

$$D_{\ell j} = D^{(2)}_{\ell k}\, D^{(1)}_{kj} \quad \text{oder} \quad D = D^{(2)}\,D^{(1)} \qquad (4.3)$$

bildlich:



Eigenschaften:

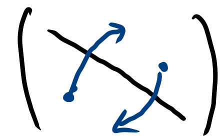
$$(\lambda A + \mu B)\cdot C = \lambda\, A\cdot C + \mu\, B\cdot C$$

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A \quad \text{(i.a.)}$$

„Ring"

weitere Operationen mit Matrizen:

- Transponieren: Spiegeln an der Diagonalen 

$$(A^T)_{jk} = A_{kj} \qquad \text{i.a. } A^T \neq A\,, \quad (A^T)^T = A \qquad (4.4)$$

speziell: $A^T = A$ „symmetrisch" (6 Elemente)

$A^T = -A$ „antisymmetrisch" (3 Elemente)

jede Matrix $A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{sym}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{antisym.}}$, $(AB)^T = B^T A^T$ (4.5)

- Invertieren: Matrix-Operation rückgängig machen

„neutrale Operation": $\underline{a}' = E\,\underline{a} \overset{!}{=} \underline{a} \longrightarrow E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$

Einheitsmatrix $E_{ij} = (\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$, $E \cdot A = A = A \cdot E$

Inverses A^{-1}: $\underline{a}'' = A^{-1}\underline{a}' = A^{-1}A\,\underline{a} \overset{!}{=} \underline{a} \longrightarrow A^{-1}A = \mathbb{1}$ (4.6)

oder $A A^{-1} = \mathbb{1}$ und $(A^{-1})^{-1} = A$

A^{-1} existiert nicht immer! z.B.: $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat kein N^{-1}

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (4.7) weil $\mathbb{1} = (AB)\cdot(AB)^{-1} \overset{(4.7)}{=} A\overbrace{B B^{-1}}A^{-1} = A A^{-1}$

Determinante

$$|A| = \det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} =$$

$$= A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32}$$
$$- A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} - A_{13} A_{22} A_{31} \qquad (4.8)$$

Spatprodukt der Zeilen oder Spalten von A

Eigenschaften:

- $|\lambda A| = \lambda^3 |A|$ (4.9) • $|\mathbb{1}| = 1$
- $\left| \begin{pmatrix} d_1 & x & x \\ 0 & d_2 & x \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \right| = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$
- $|A|$ wechselt Vorzeichen bei Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) von A
  $\hookrightarrow |A| = 0$ falls 2 Zeilen (oder Spalten) zueinander proportional sind
- $|AB| = |A| \cdot |B|$ (4.10) aber $|A+B| \neq |A| + |B|$
- $|A^T| = |A|$ (4.11) • $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (4.12)

Spur („trace")

$$\mathrm{sp}(A) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \qquad (4.13)$$

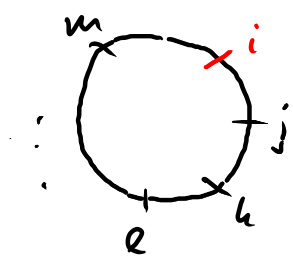
Eigenschaften:

- $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA) \neq \mathrm{sp}(A) \cdot \mathrm{sp}(B) \qquad (4.14)$
- $\mathrm{sp}(A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(n)}) = \mathrm{sp}(A^{(2)}A^{(3)} \dots A^{(n)}A^{(1)})$ zyklisch

weil $A^{(1)}_{ij} A^{(2)}_{jk} A^{(3)}_{kl} \dots A^{(n)}_{mp} = (A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(n)})_{ip}$

$\longrightarrow \mathrm{sp}(A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(n)}) = A^{(1)}_{ij} A^{(2)}_{jk} A^{(3)}_{kl} \dots A^{(n)}_{mi}$

$\mathrm{sp}(i \overset{j}{+}\!\!-\!\!\overset{k}{+}\!\!-\!\!\overset{l}{+} \cdots \overset{m}{+} p) =$



- $\mathrm{sp}(\mathbb{1}) = 3$
- $\mathrm{sp}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{sp}(A) \qquad (4.15)$
- $\mathrm{sp}(A + B) = \mathrm{sp}(A) + \mathrm{sp}(B) \qquad (4.16)$
- $\mathrm{sp}(A^T) = \mathrm{sp}(A) \qquad (4.17)$
- $\mathrm{sp}(A^{-1}) = \,?$

Drehmatrizen sind speziell, angegeben durch 3 Größen

- Wann ist eine Matrix eine Drehmatrix?
- welche Beziehungen $D \rightleftarrows \vec{n}, \varphi$?

$$\delta_{j\ell} \overset{\text{VONS}}{=} \vec{f}_j \cdot \vec{f}_\ell \underset{(4.1')}{=} (D_{jk}\vec{e}_k)\cdot(D_{\ell m}\vec{e}_m) = D_{jk} D_{\ell m} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_m$$

$$\overset{\text{VONS}}{=} D_{jk} D_{\ell m} \delta_{km} = D_{jk} D_{\ell k} = D_{jk} (D^T)_{k\ell} = (D D^T)_{j\ell}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightsquigarrow \; D D^T = \mathbb{1} \qquad \text{„Orthogonalität"} \\ \Leftrightarrow \; D^T D = \mathbb{1} \iff D^{-1} = D^T \end{array}\right\} \quad (4.18)$$

man sagt: $D \in O(3)$ „orthogonale 3x3 Matrizen"

wir hatten: $\underline{a}' = D\,\underline{a}$ mit $D_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k \iff a'_j = D_{jk} a_k$

damit gilt: $\underline{a} = D^T \underline{a}'$ mit $(D^T)_{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{f}_k \iff a_j = (D^T)_{jk} a'_k = a'_k D_{kj}$

$\rightarrow$ Rechtsmultiplikation der $\underline{\text{Zeile}}$ $\underline{a}'^T = (a'_1, a'_2, a'_3)$ mit D: (4.19)

$$\underline{a}^T = (D^T \underline{a}')^T = \underline{a}'^T (D^T)^T = \underline{a}'^T D \qquad (4.19')$$

Basisvektoren: $\vec{f}_j = D_{jk}\vec{e}_k \longrightarrow \vec{e}_j = \vec{f}_k D_{kj}$ (4.20)

Vektor ist invariant unter passiver Drehung:

$$\vec{a} = \vec{e}_j\, a_j \overset{(4.20)}{=} \underbrace{\vec{f}_k \overbrace{D_{kj}\, a_j}^{}}_{} = \vec{f}_k\, a'_k = \vec{a}$$

Skalarprodukt ist drehinvariant, check:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{a}^T \underline{b} \xrightarrow{D} \underline{a}'^T \underline{b}' = (D\underline{a})^T (D\underline{b}) = \underline{a}^T \underbrace{D^T D}_{}\, \underline{b} = \underline{a}^T \mathbb{1}\, \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b}$$

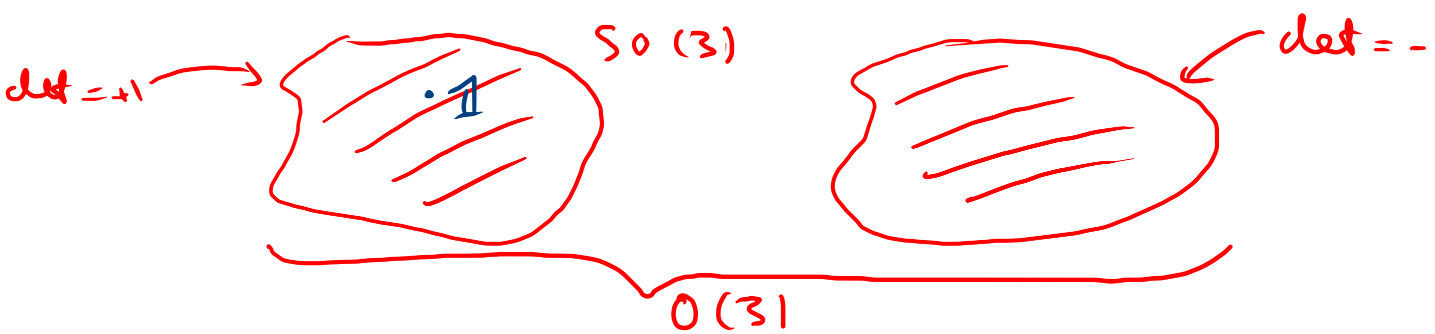
- Determinante einer Drehmatrix

$$1 = \det(\mathbb{1}) \overset{(4.18)}{=} \det(D D^T) = \det(D)\cdot\det(D^T) = (\det D)^2$$

$\curvearrowright$ $\det D = +1$ (Drehung) oder -1 (Drehspiegelung) $\quad$ (4.21)

Spiegelung, z.B.: $S = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ oder $S = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

jede Drehspiegelung läßt sich schreiben als $S\cdot D$ mit $\det S = -1$ & $\det D = +1$. Also



- Drehachse $\vec{n}$ aus D

$$\underline{D}\,\underline{n} = \underline{n} \qquad \color{red}{(4.22)}$$ Spezialfall eines Eigenwert-Problems

$\Leftrightarrow \ (\underline{D} - \mathbb{1})\cdot \underline{b} = 0$, normiere $\underline{n} = \underline{b}/b$

für $\underline{b} \neq 0$ muss $\det(D - \mathbb{1}) = 0$ sein

<u>Beispiel:</u>

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$0 = (D - \mathbb{1})\cdot \underline{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -b_1 + b_2 + \sqrt{2}\,b_3 \\ b_1 - b_2 - \sqrt{2}\,b_3 \\ -\sqrt{2}b_1 + \sqrt{2}b_2 - 2b_3 \end{bmatrix}$$ abhängig

$$2 \text{ Glgn:} \quad \left\{\begin{matrix} b_1 - b_2 - \sqrt{2}\,b_3 = 0 \\ -b_1 + b_2 - \sqrt{2}\,b_3 = 0 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \left\{\begin{matrix} b_3 = 0 \\ b_1 = b_2 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \underline{b} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Drehwinkel φ aus D (hier: nur $\cos\varphi$)

$$D_{\vec{n},\varphi} = D_0^T D_{z,\varphi} D_0$$ wobei $D_0 : \vec{n} \longrightarrow \vec{e}_3$ dreht

$$\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sp}(D_{\vec{n},\varphi}) = \operatorname{sp}(D_0^T D_{z,\varphi} D_0) = \operatorname{sp}(\underbrace{D_0 D_0^T}_{\mathbb{1}} D_{z,\varphi}) = \operatorname{sp}(D_{z,\varphi})$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{sp}(D_{\vec{n},\varphi}) = 1 + 2\cos\varphi \qquad \color{red}{(4.23)}$$

• Rekonstruktion von D aus $\vec{n}$ & φ

$\vec{n} \doteq \underline{n}^T = (u, v, w) \qquad u^2+v^2+w^2=1$

aus den Übungen ...

$$D = \underline{n}\,\underline{n}^T + \cos\varphi\,(\mathbb{1} - \underline{n}\,\underline{n}^T) - \sin\varphi\,(\underline{n} \times \ldots)$$

$$= \cos\varphi \cdot \mathbb{1} + (1-\cos\varphi)\,\underline{n}\,\underline{n}^T - \sin\varphi\,(\underline{n} \times \ldots) \qquad (4.24)$$

$$= \cos\varphi \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-\cos\varphi) \cdot \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix} - \sin\varphi \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: engere „Physiker-Definition" von Vektoren:

$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$ heißt Vektor $\Leftrightarrow$ $a_j' = D_{jk} a_k$ unter Drehung

(4.25) $\qquad \{\vec{e}_i\} \longrightarrow \{\vec{f}_j = D_{jk}\vec{e}_k\}$

IV.2 Tensorbegriff

Komponenten		Objekte	
Zahl	a	Skalar (Tensor 0. Stufe)	a
Tripel	$\underline{a} = (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Spalte $\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ Zeile	Vektor (Tensor 1. Stufe)	$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$
Matrix	$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$	Tensor (2. Stufe)	$\hat{A} = \hat{e}_{ij} A_{ij}$
Schema	$T = (T_{i_1 i_2 \dots i_n})$	Tensor n-ter Stufe	$\hat{T} = \hat{e}_{i_1 i_2 \dots i_n} T_{i_1 i_2 \dots i_n}$

allg. Definition:

Schema $(T_{i_1 \dots i_n})$ definiert Tensor n-ter Stufe

$$\hat{T} \doteq (T_{i_1 \dots i_n}) \iff T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = D_{i_1 k_1} D_{i_2 k_2} \dots D_{i_n k_n} T_{k_1 k_2 \dots k_n} \qquad (4.26)$$

unter Drehung $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{D} \{\vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k\}$

Kurzschreibweise: $T' = DD\dots DT$

Tensor $\hat{T}$ ändert sich nicht bei Koordinatendrehung:

$$\hat{T} = \hat{e}_{i_1\dots i_n} T_{i_1\dots i_n} = \hat{f}_{k_1\dots k_n} T'_{k_1\dots k_n}$$

kann Tensor (2. Stufe) als lineare Abbildung interpretieren:

$w_j = A_{jk} v_k$ soll als aktive Operation

$\hat{A} : \vec{v} \longmapsto \vec{w} = \hat{A} \cdot \vec{v}$ gelesen werden

also $\hat{A} \doteq (A_{jk})$ im VONS $\{\vec{e}_j\}$

dann liegt $\hat{A} \doteq (A'_{jk})$ im gedrehten VONS $\{\vec{f}_k\}$ fest

$w'_j = A'_{jk} v'_k$

$$\begin{tikzcd} \underline{v} \arrow[r, "A"] \arrow[d, bend right, "D"'] & \underline{w} \arrow[d, bend left, "D"] \\ \underline{v}' \arrow[r, "A'"] & \underline{w}' \end{tikzcd}$$

ausgeschrieben:

$$w'_j = D_{jl} w_l = D_{jl} A_{lk} v_k = D_{jl} A_{lk} D^T_{km} v'_m$$

$$= (D_{jl} D_{mk} A_{lk}) v'_m \doteq A'_{jm} v'_m$$

$$\to A'_{jm} = D_{jl} D_{mk} A_{lk} = D_{jl} A_{lk} D^T_{km} \iff A' = D A D^T$$

$\rightarrow \quad sp(A') = sp(A) \quad$ und $\quad \det(A') = \det(A)$

$$\underline{v}' = D\underline{v} \quad \rightarrow \quad \underline{w}' = A'\underline{v}' = D A \underbrace{D^T D}\underline{v} = DA\underline{v} = D\underline{w}$$

„Kovarianz"

Matrix A definiert auch eine Bilinearform:

$$B(\vec{u},\vec{v}) = \underline{u}^T A \underline{v} = u_j A_{jk} v_k = \vec{u}\cdot\hat{A}\cdot\vec{v} \qquad (4.28)$$

Vertauschen der Argumente:

$\underline{a}^T\underline{b} = \underline{b}^T\underline{a}$

$$B(\vec{v},\vec{u}) = \underline{v}^T A \underline{u} = (A^T\underline{v})^T\underline{u} = \underline{u}^T A^T \underline{v} \quad \text{also } A \rightarrow A^T$$

gleiche Argumente $\rightarrow$ quadratische Form:

$$Q(\vec{u}) = B(\vec{u},\vec{u}) = \vec{u}\cdot\hat{A}\cdot\vec{u} = \underline{u}^T A\underline{u} = u_j A_{jk} u_k$$

$$= A_{11}u_1^2 + A_{12}u_1u_2 + A_{13}u_1u_3 + \dots + A_{33}u_3^2$$

Dyadisches Produkt / Tensorprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b}$ = Tensor 2. Stufe (Dyade)

Def.: $(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} = a_i b_j$ (4.29)

$$\vec{a} \circ \vec{b} \doteq \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \underline{a}\, \underline{b}^T = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} (\cdot \;\cdot\; \cdot)$$

Bsp.: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$

$\vec{n} \circ \vec{n} = P_{\vec{n}}$ Projektor auf $\vec{n}$

Wirkung auf Vektoren:

$$(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij}\, c_j = a_i b_j c_j \iff (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\, (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (4.29')$$

zerlege $\vec{a} \circ \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a})$

antisymmetrischer Teil enthält das Kreuzprodukt $\vec{\omega} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} \doteq \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 & 0 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_3 b_2 - a_2 b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\doteq -\vec{\omega} \times \ldots \qquad \text{weil} \ldots$$

$$(\vec a\circ\vec b-\vec b\circ\vec a)\cdot\vec c \doteq \begin{pmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_3c_2-\omega_2c_3\\ \omega_1c_3-\omega_3c_1\\ \omega_2c_1-\omega_1c_2\end{pmatrix} \doteq -\vec\omega\times\vec c$$

$\Vert$ (4.29') $\qquad$ (4.30) $\qquad$ $\Vert$ $\vec\omega=\vec a\times\vec b$

$$\vec a(\vec b\cdot\vec c)-\vec b(\vec a\cdot\vec c) \longleftarrow \text{„BAC- CAB"} \longrightarrow -(\vec a\times\vec b)\times\vec c$$

$$(\vec a\circ\vec b-\vec b\circ\vec a)_{ij} = a_ib_j-a_jb_i = \varepsilon_{ijk}(\vec a\times\vec b)_k \qquad (4.30')$$

Spezielle Tensoren:

- $$\hat e_{ij}=\vec e_i\circ\vec e_j \doteq \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\end{array}$$ weil $(\hat e_{ij})_{kl}=(\vec e_i)_k(\vec e_j)_l=\delta_{ik}\delta_{jl}$ (4.31)

ist Basis: $\hat A=\hat e_{ij}A_{ij}\doteq A_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\dots+A_{33}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

damit von Objekten zu Komponenten, z.B. $\vec w=\hat A\cdot\vec v$

$$\vec w=\vec e_j\,\underset{\sim}{w_j} = \hat e_{jk}\underbrace{A_{jk}\cdot\vec e_l}\,v_l = \vec e_j\,\delta_{kl}A_{jk}v_l = \vec e_j\,\underset{\sim}{A_{jl}v_l}$$

$$\rightarrow\quad w_j=A_{jl}v_l$$

- $\hat e_{i_1\dots i_n}=\vec e_{i_1}\circ\vec e_{i_2}\circ\dots\circ\vec e_{i_n}$ $\qquad$ mehrfache Dyade

- $\mathbb{1} = \hat{e}_{ij}\,\delta_{ij} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \doteq \hat{f}_{ij}\,\delta_{ij} \iff \delta_{ij} = \delta'_{ij}$ drehinvariant

  $\curvearrowright$ $sp\,(A) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii}$ invariant

- $\hat{\varepsilon} = \hat{e}_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \hat{f}_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} \iff \varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ drehinvariant

  $\curvearrowright$ $\det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ invariant

ε - Tensor vermittelt zwischen Vektor & antisym. Tensor $\hat{A}$

$\hat{\varepsilon} : \vec{a} \longmapsto \hat{A}$ wegen $A_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k \iff \hat{A} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{a}$

und $\hat{A} \longmapsto \vec{a}$ wegen $a_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk} \iff \vec{a} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{A}$

(4.32)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_1 = A_{23}\,, \quad a_2 = A_{31}\,, \quad a_3 = A_{12}$

IV.3 Hauptachsentransformation

<u>Beh.:</u> zu einer symmetrischen Matrix $H = H^T$

gibt es mindestens eine Drehmatrix D, so dass

(4.33) $$H' = D H D^T = \Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ausgeschrieben $(D: \{\vec{e}_i\} \to \{\vec{f}_j\})$:

$$D H D^T = \begin{pmatrix} - & \underline{f}_1^T & - \\ - & \underline{f}_2^T & - \\ - & \underline{f}_3^T & - \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{f}_1 & \underline{f}_2 & \underline{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \underline{f}_1^T & - \\ - & \underline{f}_2^T & - \\ - & \underline{f}_3^T & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ H\underline{f}_1 & H\underline{f}_2 & H\underline{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{f}_1^T H \underline{f}_1 & \underline{f}_1^T H \underline{f}_2 & \cdot \\ \underline{f}_2^T H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \\ \underline{f}_3^T H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \overset{!}{=}$$

(4.34) $$\Longleftrightarrow \quad \hat{H} \vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$$

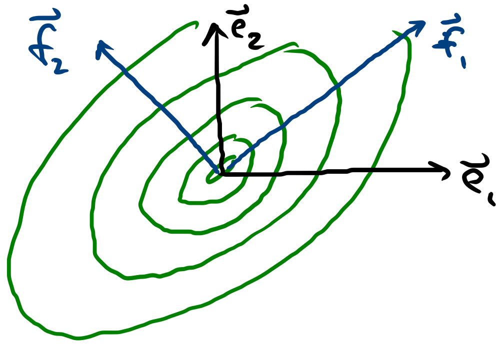
(keine $\sum_j$) mit $\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij}$ Eigenwert-Problem

Eigenwert (EW) Eigenvektor (EV)

$\exists$ davon jeweils drei $(j = 1, 2, 3)$

Bild: H als quadratische Form $Q(\vec{u}) = \vec{u}\cdot\hat{H}\vec{u} = \underline{u}^T H \underline{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Niveauflächen $Q(\vec{u}) = $ konst. sind Ellipsoide (falls EW positiv)



$\vec{f}$-Basis ist Eigenbasis von $\hat{H}$

$\Updownarrow$

Hauptachsen des Ellipsoids

Beweis:

A) Beträge der Eigenvektoren liegen nicht fest $\longrightarrow$ kann normieren

B) EW verschieden $\Longrightarrow$ EV orthogonal:

$$\left.\begin{aligned}\hat{H}\vec{f}_1 &= \lambda_1\vec{f}_1\\ \hat{H}\vec{f}_2 &= \lambda_2\vec{f}_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \vec{f}_2\cdot(\hat{H}\vec{f}_1 - \lambda_1\vec{f}_1) = \vec{f}_2\cdot\hat{H}\vec{f}_1 - \lambda_1\vec{f}_2\cdot\vec{f}_1$$

$$= (\hat{H}^T\vec{f}_2)\cdot\vec{f}_1 - \lambda_1\vec{f}_2\cdot\vec{f}_1 \underset{\substack{\uparrow\\ H^T=H}}{=} (\hat{H}\vec{f}_2)\cdot\vec{f}_1 - \lambda_1\vec{f}_2\cdot\vec{f}_1$$

$$= \lambda_2\vec{f}_2\cdot\vec{f}_1 - \lambda_1\vec{f}_2\cdot\vec{f}_1 = (\lambda_2-\lambda_1)\,\vec{f}_2\cdot\vec{f}_1 \quad \text{q.e.d.}$$

NR: $\vec{a}\cdot\hat{H}\vec{b} = \underline{a}^T H \underline{b}$

$= (\underline{a}^T H \underline{b})^T = \underline{b}^T H^T \underline{a}$

$= \underline{b}^T (H^T\underline{a}) = (H^T\underline{a})^T \underline{b}$

$= (\hat{H}^T\vec{a})\cdot\vec{b}$

c) EW sind Lösungen einer kubischen Gleichung:

$(\hat{H} - \lambda \mathbb{1}) \cdot \vec{f} = 0$ hat Lösungen $\vec{f} \neq \vec{0}$ genau dann wenn

$\det(\hat{H} - \lambda \mathbb{1}) = 0$ liefert $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Nullstellen des „charakteristische Polynom"

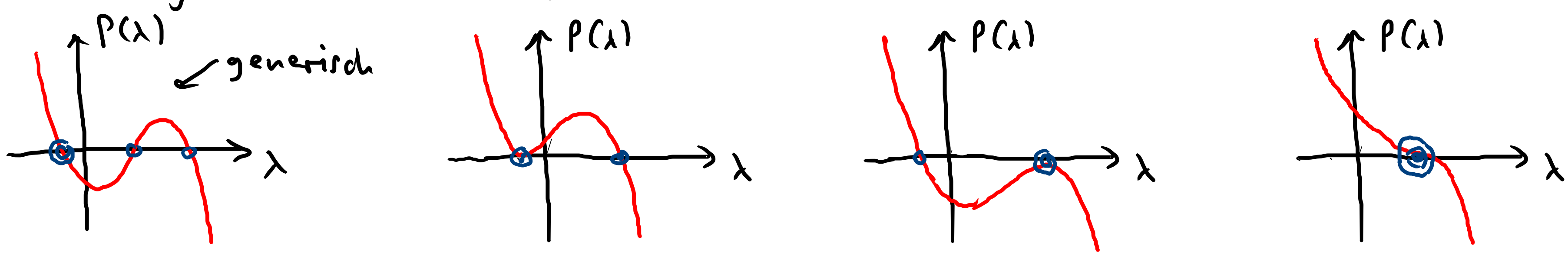
$$P(\lambda) = \det(H - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (\mathrm{sp}\, H)\cdot\lambda^2 - q(H)\cdot\lambda + (\det H) \quad (4.35)$$

mit $\mathrm{sp}(H) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$q(H) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) = \frac{1}{2}\mathrm{sp}(H)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{sp}(H^2)$

$\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

D) 4 mögliche Fälle für $H^T = H$



E) bei Entartungen (Fälle 2-4) sind 2 EW gleich z.B. $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}\vec{f}_1 &= \bar{\lambda}\vec{f}_1 \\ \hat{H}\vec{f}_2 &= \bar{\lambda}\vec{f}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{H}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2) = \alpha\bar{\lambda}\vec{f}_1 + \beta\bar{\lambda}\vec{f}_2 = \bar{\lambda}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2)$$

$\rightsquigarrow$ jede Kombination $\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2$ ist EV $\rightsquigarrow$ „Eigenebene"

wenn alle drei 3 EW gleich, dann $\hat{H} = \bar{\lambda}\,\mathbb{1}$

$\rightsquigarrow$ <u>jeder</u> Vektor ist EV $\rightsquigarrow$ „Eigenraum"

IV.4 Beispiele

Tensoren 2. Stufe vermitteln lineare Abbildungen von Vektoren

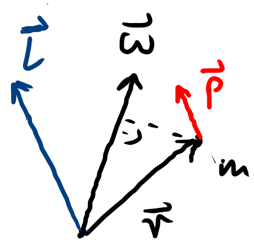
$$\vec{a} = \hat{H} \cdot \vec{u} + \vec{c} \qquad \text{(Verallg. von linearen Funktionen)}$$

Interpretation: $\vec{u}$ = Ursache, $\vec{a}$ = Antwort

$(\hat{H}, \vec{c})$ sind Systemdaten

Beispiel A) Trägheitstensor

Massepunkt m führt momentane Rotation mit Winkelgeschw. $\vec{\omega}$ bezgl. Ursprung aus (z.B. wird durch masselose Drähte geführt)



hier: $\vec{L}$ präzediert um $\vec{\omega}$ (fest) $\qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\left(\vec{\omega}\, r^2 - \vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right)$$

$$= m\left(r^2 \mathbb{1} - \vec{r} \circ \vec{r}\right) \cdot \vec{\omega} =: \hat{I} \cdot \vec{\omega} \qquad (4.36)$$

definiert Trägheitstensor $\hat{I}$ (bzgl. $\vec{r} = 0$) mit Komponenten

$$I_{ij} = m\left(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j\right) \qquad \left(r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\underline{I} = m r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} \qquad (4.37)$$

$\underline{I} = \underline{I}^T$, für mehrere Massen m_α $(\alpha = 1, \ldots, N)$ mit gleichen $\vec{\omega}_\alpha = \vec{\omega}$

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{L}_\alpha = \sum_\alpha \hat{I}_\alpha \cdot \vec{\omega} =: \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$, also:

$$\underline{I} = \sum_\alpha m_\alpha \begin{bmatrix} y_\alpha^2+z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -y_\alpha x_\alpha & x_\alpha^2+z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -z_\alpha x_\alpha & -z_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2+y_\alpha^2 \end{bmatrix} \qquad (4.37')$$

Eigenschaften

- $I_{11} + I_{22} \geq I_{33}$ und zyklisch
- $I_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{I} \cdot \vec{n} \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0$
- $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 \iff$ Scheibe (2-dim)
- $\lambda_3 = 0 \iff$ Linie (1-dim)
- Symmetrien $\iff$ Entartung von $\hat{I}$

Zeitabhängigkeit von $\vec{r}$ $\longrightarrow$ $\hat{I}$ ist zeitabhängig (im raumfesten System)

damit, falls $\vec{\omega}$ fest:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\hat{I}} \cdot \vec{\omega}$$

$$= (\vec{r} \times \vec{p})^{\cdot} = \underbrace{\cancel{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}}_{0 \text{ weil } \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{N}$$

Drehmoment $\vec{N}$ $\longrightarrow$ Unwucht, starrer Körper: $\sum_\alpha$

Ausnahme: $\vec{\omega}$ ist Eigenvektor von $\hat{I}$:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega} \quad \leadsto \quad \vec{N} = 0 \qquad (4.38)$$

λ zeitunabhängig

„Auswuchten"

Beispiel B) Leitfähigkeit

Ursache: $\vec{E}$-Feld, Antwort: Elektronen-Geschw. $\vec{v}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{\text{Strom}}$

oder: Stromdichte $\vec{j} = \overrightarrow{\text{Strom}}/\text{Fläche}$

Lineare Beziehung: $\vec{j} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}$ (4.39) Ohmsches Gesetz

$\hat{\sigma}$ Leitfähigkeitstensor

- isotropes Medium $\leadsto$ $\vec{j} \parallel \vec{E}$ $\leadsto$ $\hat{\sigma} = \sigma \cdot \mathbb{1}$ (Zahl)
- anisotropes Medium $\leadsto$ $\exists$ Vorzugsrichtungen $\leadsto$ i.a. $\vec{j} \nparallel \vec{E}$ $\leadsto$ $\hat{\sigma}$ Tensor

Beispiel C: harmonische Näherung eines Potenzialminimums

hier in 2 Dimensionen: 2 Federn

$\vec{F} = -\hat{H} \cdot \vec{r}$ (4.40) Hookesches Gesetz (Ruhelage $\vec{r}_0 = 0$)

harmonische Kraft, Vorzugsrichtungen, i. a. $\vec{F} \nparallel \vec{r}$

wie sieht das Potenzial aus? $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

zu Fuß: $F_1 = -H_{11} x - H_{12} y \stackrel{!}{=} -\partial_x V \leadsto V = \frac{1}{2} H_{11} x^2 + H_{12} xy + f(y)$

$F_2 = -H_{21} x - H_{22} y \stackrel{!}{=} -\partial_y V = -H_{12} x - f'(y)$

$\leadsto H_{21} = H_{12}$ und $f(y) = \frac{1}{2} H_{22} y^2 + \text{konst.}$ (setze konst $= 0$)

also für $H = H^T$:

$$V = \frac{1}{2} H_{11} x^2 + H_{12} xy + \frac{1}{2} H_{22} y^2$$
$$= \frac{1}{2} \left(x H_{11} x + x H_{12} y + y H_{21} x + y H_{22} y \right)$$
$$= \frac{1}{2} \underline{r}^T H \underline{r} = \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \hat{H} \cdot \vec{r} \qquad (4.41)$$

in Hauptachsenbasis: $V = \frac{1}{2} \omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 y^2$ weil: $H = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \omega_i =$ Eigenfrequenzen, Normalschwingungen

Fahrplan zur Hauptachsentransformation (3D)

① $H = H^T$?

② löse $\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ für λ

sortiere die 3 Lösungen $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$

Entartung?

③ Proben: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = sp(H)$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(H)$

④ zu <u>jedem</u> EW λ_j löse

$$(H - \lambda_j \mathbb{1})\, \underline{v}_j = 0 \quad \text{für } \underline{\lambda}_j \rightsquigarrow \underbrace{\{\vec{v}_j\}}_{} \text{ sind EVn}$$

[kann eine nichtnull Komponente von $\vec{v}_j$ frei wählen]

⑤ Probe der Orthogonalität:

$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$ für $j \neq k$

shortcut: $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$

bei Entartung: orthogonale Linearkombination wählen

⑥ normiere die EV: $\vec{f}_j = \vec{v}_j / v_j$

wechsle evtl. ein Vorzeichen (z.B. $\vec{f}_3 \mapsto -\vec{f}_3$) so dass Rechtssystem

⑦ notiere Resultate in Form

$$H' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} \text{---} & \underline{f}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \underline{f}_2 & \text{---} \\ \text{---} & \underline{f}_3 & \text{---} \end{bmatrix}$$